4018

May 2013

(For Scheme I Candidates Only)

Second Year Higher Secondary SAY/Improvement Examination

Part – III

MATHEMATICS (SCIENCE)

Maximum : 80 Scores

Time : 2½ Hours
Cool off time : 15 Minutes

General Instructions to Candidates :

- There is a 'cool off time' of 15 minutes in addition to the writing time of *2½* hrs.
- You are not allowed to write your answers nor to discuss anything with others during the 'cool off time'.
- Use the 'cool off time' to get familiar with questions and to plan your answers.
- Read questions carefully before answering.
- All questions are compulsory and only internal choice is allowed.
- When you select a question, all the sub-questions must be answered from the same question itself.
- Calculations, figures and graphs should be shown in the answer sheet itself.
- Malayalam version of the questions is also provided.
- Give equations wherever necessary.
- Electronic devices except non programmable calculators are not allowed in the Examination Hall.

നിർദ്ദേശങ്ങൾ :

- നിർദ്ദിഷ്ട സമയത്തിന് പുറമെ 15 മിനിറ്റ് 'കൂൾ ഓഫ് ടൈം' ഉണ്ടായിരിക്കും. ഈ സമയത്ത് ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം എഴുതാനോ, മറ്റുള്ളവരുമായി ആശയ വിനിമയം നടത്താനോ പാടില്ല.
- ഉത്തരങ്ങൾ എഴുതുന്നതിന് മുമ്പ് ചോദ്യങ്ങൾ ശ്രദ്ധാപൂർവ്വം വായിക്കണം.
- എല്ലാ ചോദ്യങ്ങൾക്കും ഉത്തരം എഴുതണം.
- ഒരു ചോദ്യനമ്പർ ഉത്തരമെഴുതാൻ തെരഞ്ഞെടുത്തു കഴിഞ്ഞാൽ ഉപചോദ്യങ്ങളും അതേ ചോദ്യ നമ്പരിൽ നിന്ന് തന്നെ തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതാണ്.
- കണക്ക് കൂട്ടലുകൾ, ചിത്രങ്ങൾ, ഗ്രാഫുകൾ, എന്നിവ ഉത്തര പേപ്പറിൽ തന്നെ ഉണ്ടായിരിക്കണം.
- ആവശ്യമുള്ള സ്ഥലത്ത് സമവാക്യങ്ങൾ കൊടുക്കണം.
- ചോദ്യങ്ങൾ മലയാളത്തിലും നൽകിയിട്ടുണ്ട്.
- പ്രോഗ്രാമുകൾ ചെയ്യാനാകാത്ത കാൽക്കുലേറ്ററുകൾ ഒഴികെയുള്ള ഒരു ഇലക്ട്രോണിക് ഉപകരണവും പരീക്ഷാഹാളിൽ ഉപയോഗിക്കുവാൻ പാടില്ല.

1. a) Find $\frac{dy}{dx}$, if $y = \log x, x > 0$. **(1)**

   b) Is $f(x) = |x|$ differentiable at $x = 0$? **(1)**

   c) Find $\frac{dy}{dx}$, if $x = \sin\theta - \cos\theta$ and $y = \sin\theta + \cos\theta$. **(1)**

2. Consider the matrices

   $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ and $A + 3B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

   a) Find matrix B. **(1)**

   b) Find matrix AB. **(1)**

   c) Find the transpose of B. **(1)**

3. If a matrix $A = \begin{pmatrix} 3x & x \\ -x & 2x \end{pmatrix}$ is a solution of the matrix equation $x^2 - 5x + 7I = 0$, find any one value of x. **(3)**

4. Fill in the blanks : **(1×3=3)**

   a) If l, m, n are the direction cosines of a line then $l^2 + m^2 + n^2 =$ ______

   b) The distance from the origin to the plane $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ is ______

   c) If θ is the angle between the planes $2x + y - 2z = 5$ and $3x - 6y - 2z = 7$ then $\cos\theta =$ ______

1. a) $y = \log x, x > 0$ ആയാൽ $\frac{dy}{dx}$ കാണുക. **(1)**

   b) $f(x) = |x|$ എന്നത് $x = 0$ യിൽ ഡിഫറൻഷ്യബിൾ ആണോ ? **(1)**

   c) $x = \sin\theta - \cos\theta$, $y = \sin\theta + \cos\theta$ യും ആയാൽ $\frac{dy}{dx}$ കാണുക. **(1)**

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A + 3B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ എന്നീ മെട്രിക്സുകൾ പരിഗണിക്കുക.

   a) മെട്രിക്സ് B കാണുക. **(1)**

   b) മെട്രിക്സ് AB കാണുക. **(1)**

   c) B യുടെ ട്രാൻസ്പോസ് കാണുക. **(1)**

3. $A = \begin{pmatrix} 3x & x \\ -x & 2x \end{pmatrix}$ എന്ന മെട്രിക്സ് $x^2 - 5x + 7I = 0$ എന്ന മെട്രിക്സ് സമവാക്യത്തിന്റെ സൊല്യൂഷൻ ആയാൽ 'x' ന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വില കാണുക. **(3)**

4. പൂരിപ്പിക്കുക : **(1×3=3)**

   a) l, m, n ഇവ ഒരു രേഖയുടെ ഡയറക്ഷൻ കൊസൈൻസ് ആയാൽ $l^2 + m^2 + n^2 =$ ______

   b) ഒറിജിനിൽ നിന്ന് പ്ലെയിൻ $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ യിലേയ്ക്കുള്ള അകലം ______ ആകുന്നു.

   c) $2x + y - 2z = 5$, $3x - 6y - 2z = 7$ എന്നീ പ്ലെയിനുകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ 'θ' ആയാൽ $\cos\theta =$ ______

5. a) Show that

$$\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$$ **(2)**

b) Given that

$$\cot 3\theta=\frac{3\cot^2\theta-1}{\cot^3\theta-3\cot\theta}.$$

Show that $\cot^{-1}\frac{3x^2-1}{x^3-3x}, |x|<\sqrt{3}$ is $3\cot^{-1}x$. **(2)**

6. Consider the sets $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 4, 9, 16, 25\}$ and a function $f : A \to B$ defined by $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 16$ and $f(5) = 25$.

a) Show that f is one-to-one. **(1)**

b) Show that f is onto. **(1)**

c) Does f^{-1} exist ? Explain. **(2)**

7. a) Consider the function $f : R \to R$ defined by

$$f(x)=\begin{cases} a+x, & \text{if } x\le 2 \\ b-x, & \text{if } x>2 \end{cases}$$

i) Find a relation between a and b if f is continuous at $x = 2$. **(1)**

ii) Find a and b, if f is continuous at $x = 2$ and $a + b = 2$. **(1)**

5. a) $\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. **(2)**

b) $\cot 3\theta=\frac{3\cot^2\theta-1}{\cot^3\theta-3\cot\theta}$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു.

$\cot^{-1}\frac{3x^2-1}{x^3-3x}, |x|<\sqrt{3}$ എന്നത് $3\cot^{-1}x$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക. **(2)**

6. $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 4, 9, 16, 25\}$ എന്ന ഗണങ്ങളെയും, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 16$, $f(5) = 25$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഫംഗ്ഷൻ $f : A \to B$ യും പരിഗണിക്കുക.

a) f ഒൺ-റ്റു-ഒൺ എന്ന് തെളിയിക്കുക. **(1)**

b) f ഓൺ-റ്റു എന്ന് തെളിയിക്കുക. **(1)**

c) f^{-1} ഉണ്ടാകുമോ ? വിവരിക്കുക. **(2)**

7. a) $f(x)=\begin{cases} a+x, & x\le 2 \\ b-x, & x>2 \end{cases}$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഫംഗ്ഷൻ $f : R \to R$ പരിഗണിക്കുക.

i) $x = 2$ ൽ f കണ്ടിന്യൂയസ് ആണെങ്കിൽ a യും b യും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണുക. **(1)**

ii) $x = 2$ ൽ f കണ്ടിന്യൂയസും $a + b = 2$ ഉം ആയാൽ a യും b യും കാണുക. **(1)**

b) Find the derivative of

$$y=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\ 0<x<1 \text{ with}$$

respect to x. **(2)**

8. Consider a system of equations which is given below :

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4$$

$$\frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1 \text{ and}$$

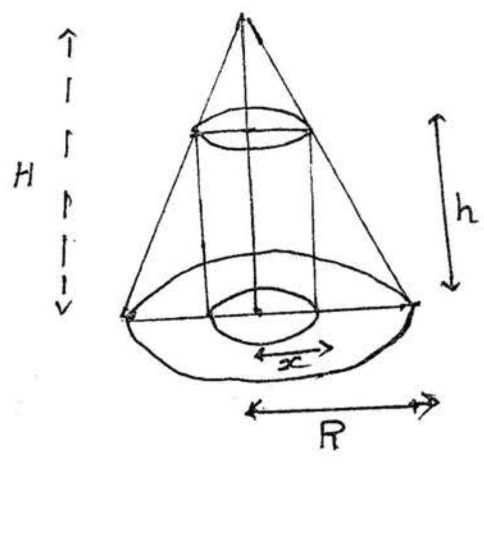
$$\frac{6}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=2.$$

a) Express the above system in the matrix form AX = B. **(1)**

b) Find A^{-1}, the inverse of A. **(3)**

c) Find x, y and z. **(1)**

9. A right circular cylinder is inscribed in a given cone of radius R cm and height H cm as shown in the figure.



b) $y=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\ 0<x<1$ ന്റെ ഡെറിവേറ്റീവ് x ആസ്പദമാക്കി കാണുക. **(2)**

8. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഒരു കൂട്ടം സമവാക്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4$$

$$\frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1$$

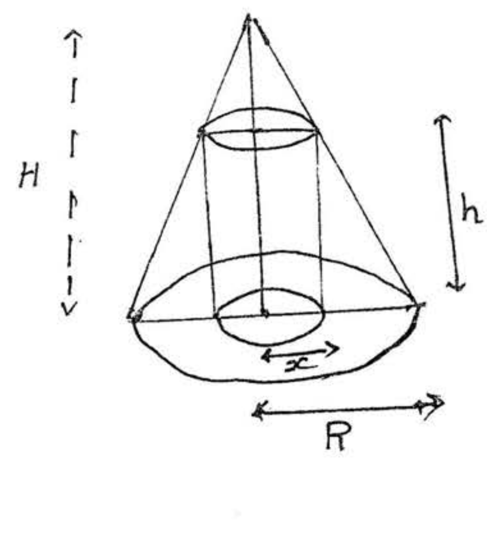
$$\frac{6}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=2.$$

a) മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളെ AX = B എന്ന മെട്രിക്സ് രൂപത്തിലെഴുതുക. **(1)**

b) A^{-1} കാണുക. **(3)**

c) x, y, z കാണുക. **(1)**

9. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ആരം R സെന്റീമീറ്ററും, ഉയരം H സെന്റീമീറ്ററും ആയ വൃത്ത സ്തൂപികയ്ക്കുള്ളിൽ ഒരു സിലിണ്ടർ വച്ചിരിക്കുന്നു.



a) Find the curved surface area S of the circular cylinder as a function of x. **(2)**

b) Find a relation connecting x and R when S is a maximum. **(3)**

10. a) Evaluate $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$ **(3)**

b) Evaluate $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$. **(2)**

11. Consider the Cartesian equation of a line $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{-2}$

a) Find its vector equation. **(2)**

b) Find its intersecting point with the plane $5x + 2y - 6z - 7 = 0$. **(3)**

12. Consider the vector equation of two planes $\vec{r}.(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 3$ and $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}) = 4$.

a) Find the Vector equation of any plane through the intersection of the above two planes. **(2)**

b) Find the Vector equation of the plane through the intersection of the above two planes and the point (1, 2, –1). **(3)**

a) സർക്കുലർ സിലിണ്ടറിന്റെ വളഞ്ഞ ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം S, ഒരു ഫംഗ്ഷൻ ഓഫ് x ൽ കാണുക. **(2)**

b) S മാക്സിമം ആകുമ്പോൾ R-ഉം x -ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണുക. **(3)**

10. a) $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$ കാണുക. **(3)**

b) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ കാണുക. **(2)**

11. ഒരു രേഖയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഇക്വേഷൻ പരിഗണിക്കുക.

$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{-2}$

a) ഈ രേഖയുടെ വെക്ടർ ഇക്വേഷൻ കാണുക. **(2)**

b) ഈ രേഖയുടെയും $5x+2y-6z-7=0$ എന്ന പ്ലെയിനിന്റെയും സങ്കമ ബിന്ദു കാണുക. **(3)**

12. $\vec{r}.(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 3$, $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}) = 4$ എന്ന രണ്ടു പ്ലെയിനുകൾ പരിഗണിക്കുക.

a) മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രണ്ട് പ്ലെയിനുകളുടെ ഇന്റർസെക്ഷൻ വഴി കടന്നുപോകുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു പ്ലെയിനിന്റെ വെക്ടർ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക. **(2)**

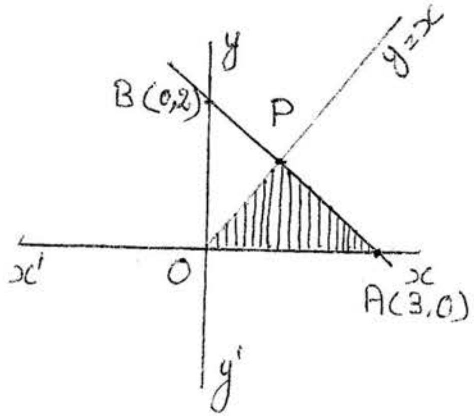
b) മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രണ്ട് പ്ലെയിനുകളുടെ ഇന്റർസെക്ഷൻ വഴിയും, (1, 2, –1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയും കടന്നു പോകുന്ന പ്ലെയിനിന്റെ വെക്ടർ ഇക്വേഷൻ കണ്ടുപിടിക്കുക. **(3)**

13. a) Evaluate $\int \log x \, dx$. **(1)**

b) Evaluate $\int x^2 \tan^{-1} x \, dx$. **(3)**

c) Find $\int_{-1}^{2} |x^3 - x| \, dx$. **(2)**

14.



Using the above figure.

a) Find the equation of AB. **(1)**

b) Find the point P. **(2)**

c) Find the area of the shaded region by integration. **(3)**

15. a) Form the differential equation of the family of circles having centre on y-axis and radius 3 units. **(3)**

b) Solve the differential equation.

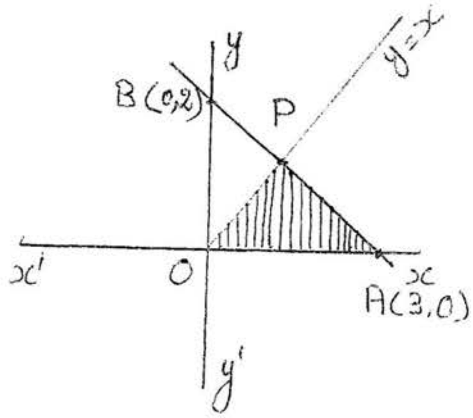
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}.$$ **(3)**

13. a) $\int \log x \, dx$ കണ്ടുപിടിക്കുക. **(1)**

b) $\int x^2 \tan^{-1} x \, dx$ കണ്ടുപിടിക്കുക. **(3)**

c) $\int_{-1}^{2} |x^3 - x| \, dx$ കാണുക. **(2)**

14.



മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം ഉപയോഗിച്ച്

a) AB യുടെ സമവാക്യം കാണുക. **(1)**

b) P എന്ന ബിന്ദു കാണുക. **(2)**

c) ഇന്റഗ്രേഷൻ ഉപയോഗിച്ച് ഷെയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക. **(3)**

15. a) y-അക്ഷത്തിൽ കേന്ദ്രവും, 3 യൂണിറ്റ് ആരവും ആയ ഒരു കൂട്ടം വൃത്തങ്ങളുടെ ഡിഫറൻഷ്യൽ ഇക്വേഷൻ രൂപീകരിക്കുക. **(3)**

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ എന്ന ഡിഫറൻഷ്യൽ ഇക്വേഷൻ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. **(3)**

16. A bakery owner makes two types of cakes A and B. Three machines are needed for this purpose. The time (in minutes) required for making each type of cake in each the machine is given below.

Machine	Types of cakes	
	A	B
I	12	6
II	18	0
III	6	9

Each machine is available for atmost 6 hours per day. Assume that all cakes will be sold out every day. The bakery owner wants to make maximum profit per day by making Rs. 7.5 from type A and Rs. 5 from type B.

a) Write the objective function by defining suitable variables. **(1)**

b) Write the constraints. **(2)**

c) Find the maximum profit graphically. **(3)**

16. ഒരു ബേക്കറി ഉടമ രണ്ടു തരം കേക്കുകൾ A യും B യും ഉല്പാദിപ്പിക്കുന്നു. ഇതിനുവേണ്ടി മൂന്നു മെഷീനുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഓരോ തരം കേക്കും, ഓരോ മെഷീനിൽ ഉല്പാദിപ്പിക്കാനുള്ള സമയം (മിനിറ്റിൽ) താഴെ പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

മെഷീൻ	കേക്ക്	
	A	B
I	12	6
II	18	0
III	6	9

ഒരു ദിവസം ഓരോ മെഷീനും പരമാവധി 6 മണിക്കൂർ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഓരോ ദിവസവും എല്ലാ കേക്കുകളും വിറ്റുപോകുമെന്ന് കരുതുക. ബേക്കറി ഉടമ, A തരം കേക്കിൽ നിന്ന് 7.5 രൂപയും, B തരം കേക്കിൽ നിന്ന് 5 രൂപയും ലാഭം ഓരോ ദിവസവും പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു.

a) ഉചിതമായ ചരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഈ പ്രശ്നത്തിന്റെ ഒബ്ജക്ടീവ് ഫംഗ്ഷൻ എഴുതുക. **(1)**

b) കൺസ്ട്രെയിൻഡ്സ് എഴുതുക. **(2)**

c) ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് ഏറ്റവും കൂടിയ ലാഭം കാണുക. **(3)**

17. a) Find the angle between the vectors

$\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ and

$\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ **(3)**

b) The adjacent sides of a parallelogram are

$\vec{a} = 3\hat{i} + \lambda\hat{j} + 4\hat{k}$ and

$\vec{b} = \hat{i} - \lambda\hat{j} + \hat{k}$

i) Find $\vec{a}\times\vec{b}$. **(2)**

ii) If the area of the parallelogram is $\sqrt{42}$ square units, find the value of λ. **(2)**

17. a) $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ എന്നീ വെക്ടറുകളുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള കോൺ കാണുക. **(3)**

b) $\vec{a} = 3\hat{i} + \lambda\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} - \lambda\hat{j} + \hat{k}$ എന്നിവ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ സമീപ വശങ്ങളാണ്.

i) $\vec{a}\times\vec{b}$ കാണുക. **(2)**

ii) ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\sqrt{42}$ ചതുരശ്ര യൂണിറ്റ് ആയാൽ λ യുടെ വില കാണുക. **(2)**